Die

Normal-Fusspunktslinien.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde in der Naturwissenschaft
an der Universität Tübingen

unter dem Präsidium von

Hermann Hankel,
Dr. der Naturwissenschaft und Philosophie, o. ö. Professor der Mathematik,

vorgelegt von

Adolph Klaas
zu Wiesbaden.

WIESBADEN.
L. Schellenberg'sche Hof-Buchdruckerei
1871.

I. Von den Fusspunktslinien im Allgemeinen.

§. 1.

Begriff der Fusspunktslinien.

Gehen von einem festen Punkte, dem Pole P (Fig. 1), nach allen Richtungen in der Ebene Strahlen s, s_1, s_2 . . ., welche einen nach einem bestimmten Systeme entwickelten Büschel von Geraden q, q_1, q_2 . . . . durchschneiden, so heisst der geometrische Ort der Schnitt- oder Fusspunkte M, M_1, M_2 . . ., in welchem die Strahlen und Geraden einen constanten oder nach bestimmten Gesetzen sich ändernden Winkel μ bilden, Fusspunktslinie im weiteren Sinne.

Die Gestalt der Fusspunktslinie und damit auch ihr analytischer Ausdruck in einem bekannten Coordinatensysteme sind hiernach von der Lage der Geraden unter sich und gegen den Pol, wie auch von dem Fusspunktswinkel abhängig.

§. 2.

Entwickelung der Fusspunktslinie, wenn der Fusspunktswinkel μ constant ist und sich die Geraden q, q_1, q_2 . . . . in einem Punkte Q schneiden. Fig. 2.

Legt man den Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystems in den Pol P und die positive X-Axe durch den Punkt Q und bezeichnet mit

u v die laufenden Parallelcoordinaten der Fusspunktslinie und mit

τ τ_1 diejenigen Winkel, welche die Schenkel des Fusspunktswinkels μ mit der X-Axe bilden,

so ergibt sich:

$$\text{tang } \tau_1 = \frac{v}{u - PQ}$$

$$\text{tang } \tau = \frac{v}{u}$$

und da $\mu = \tau_1 - \tau$

$$\text{tang } \mu = \frac{\text{tang } \tau_1 - \text{tang } \tau}{1 + \text{tang } \tau_1 \text{ tang } \tau} = \frac{\frac{v}{u - PQ} - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u - PQ} \cdot \frac{v}{u}},$$

woraus folgt:

$$u^2 + v^2 - u \,.\, PQ - v \,.\, PQ \,.\, \text{cotg } \mu = 0.$$

Es ist dieses aber die Gleichung eines Kreises, dessen Sehne die Strecke PQ und dessen Mittelpunktscoordinaten

$$x = \frac{PQ}{2}$$

$$y = \frac{PQ}{2} \text{ cotg } \mu$$

sind.

Aus dem Ausdruck für y folgt, dass der Mittelpunkt oberhalb, in oder unterhalb der Abscissenaxe liegt, je nachdem $\mu \gtreqless \frac{\pi}{2}$ ist.

§. 3.

Entstehung der Tangential- und Normal-Fusspunktslinien.

Ein bestimmtes Gesetz für die Lage der Geraden, an welche die Strahlen aus dem Pole gezogen werden sollen, wird u. A. dadurch erhalten, dass man die Geraden durch die Punkte einer ebenen Curve gehen und mit den Elementen der Curve in diesen Punkten bestimmte constante oder variabele Winkel bilden lässt. Zwei einfache Fälle dieser allgemeinen Aufgabe sind z. B. diejenigen, wobei die Geraden Tangenten oder Normalen jener zu Grunde gelegten Curve — der Basis — bilden, und es entstehen im ersteren Falle Tangential-, im letzteren Normal-Fusspunktslinien.

Die Tangential-Fusspunktslinien wurden bis jetzt von verschiedenen Mathematikern für $\mu = \frac{\pi}{2}$ untersucht und man findet dieselben mehr oder weniger ausführlich in fast allen Lehrbüchern der analytischen Geometrie einfach als »Fusspunktslinien« behandelt.

Dagegen sind die Normal-Fusspunktslinien, soweit dem Verfasser bekannt ist, bis jetzt noch nirgends erwähnt worden.

Die nachstehenden Entwickelungen — bei welchen sich übrigens, um dieselben nicht zu sehr auszudehnen, auch auf den Fall $\mu = \frac{\pi}{2}$ beschränkt werden soll — dürften sich deshalb als vollständig neu erweisen.

II. Die Normal-Fusspunktslinien.

§. 4.

Positive und negative Normal-Fusspunktslinien.

Die nähere Betrachtung der Normal-Fusspunktslinien führt sofort auf zwei Aufgaben:

1) eine Curve kann man als Basis betrachten und für irgend eine Lage des Poles nach der Normal-Fusspunktslinie fragen, oder aber
2) man sucht die Basis, zu welcher die vorgelegte Curve die Normal-Fusspunktslinie ist.

Die erstere Aufgabe lässt sich mit Hilfe der Differentialrechnung lösen, dagegen verlangt die letztere eine Integration. Wir wollen zur Bezeichnung der beiden entgegengesetzten Aufgaben die im ersten Falle gesuchte Curve »positive«, die im letzten Falle gesuchte »negative« Normal-Fusspunktslinie nennen.

A. Die positiven Normal-Fusspunktslinien.

§. 5.

Allgemeine Ableitung der Gleichungen für Normal-Fusspunktslinien.

Fig. 3.

a) in rechtwinkeligen Coordinaten.

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sei die Gleichung der Basis, wobei der Coordinatenursprung mit dem Pole zusammenfällt. Die Tangente der Basis im Punkte B bildet mit der X-Axe denselben Winkel τ_1, wie das Loth r aus

dem Pole P auf die Normale jenes Punktes. Die Neigung der Tangente wie des zugehörigen Lothes ist deshalb ausgedrückt durch

$$\text{tang } \tau_1 = \text{tang } \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

oder, die Coordinaten u v des Fusspunktes M eingeführt,

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Punkte P, M und B liegen aber auch in dem Umfang desjenigen Kreises, welcher über der Strecke P B als Durchmesser beschrieben wird und dessen Mittelpunktscoordinaten $\frac{x}{2}$ und $\frac{y}{2}$ sind, daher

$$u^2 + v^2 - ux - vy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Werden aus den Gleichungen (1), (2) und (3) die Coordinaten der Basis (xy) eliminirt, so ergibt sich die Gleichung der zugehörigen Normal-Fusspunktslinie.

b) In Polarcoordinaten.

$$r_0 = f(\Theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sei die Polargleichung der Basis, wenn der Pol des Coordinatensystems mit dem Strahlen-Pole P und die Polaraxe mit der positiven X-Axe zusammenfallen. Es bezeichne ferner

r τ die Polarcoordinaten der Fusspunktslinie,

so ist, da $\tau_1 = \tau$

$$\text{cotg } (\tau - \Theta) = \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$r = r_0 \cos (\tau - \Theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Durch Eliminiren von r_0 und Θ aus den Gleichungen (4), (5) und (6) wird die Gleichung der Normal-Fusspunktslinie in Polarcoordinaten erhalten.

§. 6.

Allgemeine Betrachtung der Gestalt der Normal-Fusspunktslinien.

Die Gestalt der Normal-Fusspunktslinien ist wesentlich verschieden, je nachdem der Pol zwischen der Evolute und der Basis

(Fig. 5 und 8), in der Evolute (Fig. 9) oder auf der entgegengesetzten Seite der Evolute liegt (Fig. 7 und 10).

Durch die Geraden in Fig. 4 sei eine Schaar von Normalen der Basis oder Tangenten der Evolute dargestellt. Fällt man von einem beliebigen Punkte P_1 ein Loth $P_1 P_3$ auf die Evolute, so lassen sich die verschiedenen Formen der gesuchten Curve näher verfolgen, wenn man den Pol auf diesem Lothe von der einen Seite der Evolute auf die andern rücken lässt.

Liegt zunächst der Pol in P_1 zwischen der Evolute und der Basis, so entsteht eine Schlinge mit dem Doppelpunkte P_1, welche mit der Annäherung des Poles an die Evolute abnimmt; die Tangenten der Fusspunktslinie in dem Doppelpunkte bilden hierbei immer spitzere Winkel miteinander und der durch drei benachbarte Punkte der Curve gezogene Kreis wird immer kleiner.

Rückt der Pol nach P_2 in die Evolute, so wird die gedachte Schlinge unendlich klein und es entsteht daher bei der Fusspunktslinie $a P_2 b$ in P_2 eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt, in welchem die Tangente der Fusspunktslinie senkrecht zur Evolute steht.

Fällt endlich der Pol auf die andere Seite der Evolute nach P_3, so verschwinden Schlinge und Spitze und die Fusspunktslinie erhält die in $c P_2 d$ gezeichnete Gestalt.

Einer Geraden, welche zugleich an zwei Stellen die Normale der Basis, also eine Doppeltangente der Evolute ist, entspricht immer ein auf dieser Geraden liegender Doppelpunkt der Fusspunktslinie. Bei der Ellipse liegt also immer ein Doppelpunkt auf der grossen und einer auf der kleinen Axe (Fig. 6); bei der Hyperbel fällt der Doppelpunkt in der Nebenaxe weg (Fig. 7), weil diese nicht in reellen Punkten geschnitten werden kann.

Da ferner die Normalen einer Curve zugleich die Tangenten ihrer Evolute sind, so ist jede Normal-Fusspunktslinie zugleich die Tangential-Fusspunktslinie der zur Basis gehörigen Evolute; und umgekehrt ist jede Tangential-Fusspunktslinie die Normal-Fusspunktslinie der zur Basis gehörigen Evolvente. Besonders merkwürdig in dieser Beziehung ist z. B. die Cykloide, bei welcher bekanntlich die Evolute wieder eine Cykloide bildet und deren Normal-Fusspunktslinie deshalb zugleich die Tangential-Fusspunktslinie einer Cykloide ist.

§. 7.

Normal-Fusspunktslinien der Central-Kegelschnitte.

a) In rechtwinkeligen Coordinaten ist

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

die sog. Mittelpunktsgleichung der Central-Kegelschnitte, wobei a und b die beiden Halbaxen bedeuten und die erstere oder Hauptaxe mit der X-Axe zusammenfällt.

Wählt man den Pol P als Coordinatenursprung und legt die neuen Axen den alten parallel, bezeichnet ferner mit m n die Coordinaten des Poles, bezogen auf die alten Axen, und mit x y die Coordinaten des Kegelschnittes, bezogen auf die neuen Axen, so ergibt sich als Gleichung des Kegelschnittes für P als Ursprung

$$\left(\frac{x+m}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y+n}{b}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2(x+m)}{a^2(y+n)},$$

oder nach (2)

$$\frac{v}{u} = \mp \frac{b^2(x+m)}{a^2(y+n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aus (3), (7) und (8) erhält man nach mehrfacher Umwandlung für die Normal-Fusspunktslinie

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2+v^2+um+vn}\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Liegt der Pol in der Y-Axe, so ist $m = 0$, daher

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2+v^2+vn}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Rückt der Pol in die X-Axe, so wird $n = 0$ und somit

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2+v^2+um}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Fällt der Pol mit dem Mittelpunkt des Kegelschnittes zusammen, so ist $m = 0$ und $n = 0$, daher

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2+v^2}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für den Brennpunkt als Pol wird $m = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2}$, $n = 0$, folglich

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2 + v^2 \pm u\sqrt{a^2 \mp b^2}}\right]^2 \quad \ldots \quad (13)$$

Fällt der Pol in den Scheitel der Curve auf der Seite der negativen X-Axe, so hat man $m = -a$, $n = 0$, also

$$v^2a^2 \pm u^2b^2 = \left[\frac{uv(a^2 \mp b^2)}{u^2 + v^2 - ua}\right]^2 \quad \ldots \quad (14)$$

b) In Polarcoordinaten

geben die Gleichungen (7) bis (14), wenn (wie früher) deren Pol, mit dem Punkte P und die Polaraxe mit der positiven X-Axe zusammenfallen, $r\,\tau$ aber die laufenden Polarcoordinaten der Fusspunktslinie bedeuten:

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} - m\cos\tau - n\sin\tau \quad \ldots \quad (9a)$$

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} - n\sin\tau \quad \ldots \quad (10a)$$

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} - m\cos\tau \quad \ldots \quad (11a)$$

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} \quad \ldots \quad (12a)$$

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} \mp \sqrt{(a^2 \mp b^2)}\cos\tau \quad \ldots \quad (13a)$$

$$r = \frac{(a^2 \mp b^2)\sin\tau\cos\tau}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\tau \pm b^2\cos^2\tau}} + a\cos\tau \quad \ldots \quad (14a)$$

In diesen Gleichungen gelten die oberen Zeichen für die Ellipse, die unteren für die Hyperbel.

Bei der Ellipse besteht die Fusspunktslinie aus zwei geschlossenen Aesten, welche keinen, 2 oder 4 Punkte mit der Ellipse gemeinschaftlich haben, je nachdem der Pol innerhalb, auf dem Umfange oder ausserhalb der Ellipse liegt.

Für den Mittelpunkt als Pol ist nach (12a) $r = 0$ bei $\tau = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\tau = \pi$ und $\tau = \frac{3\pi}{2}$; ausserdem nimmt r in jedem Qua-

dranten gleiche Werthe an. Es bilden sich demnach in den 4 Quadranten 4 symmetrische Schlingen. Fig. 5.

Nach (9a) ist ferner:

$$r = -m \text{ für } \tau = 0,$$

$$r = -n \quad » \quad \tau = \frac{\pi}{2},$$

$$r = m \quad » \quad \tau = \pi,$$

$$r = n \quad » \quad \tau = \frac{3\pi}{2},$$

und ausserdem wird $r = 0$ für

$$m \cos \tau + n \sin \tau = \frac{(a^2 \mp b^2) \sin \tau \cos \tau}{\mp \sqrt{a^2 \sin^2 \tau \pm b^2 \cos^2 \tau}}.$$

Hiernach schneiden sich die beiden Aeste der Fusspunktslinie im Pole, in dem Fusspunkte des Lothes von dem Pole auf die grosse Axe und in demjenigen auf die kleine Axe. (Vergleiche auch §. 6.)

Fällt der Pol in eine Curvenaxe, so verschwindet m oder n, und die beiden Aeste der Fusspunktslinie haben ausser dem Pole noch den Mittelpunkt der Ellipse gemeinschaftlich (Fig. 6), dieselben liegen dann symmetrisch in Bezug auf diese Axe.

Je mehr sich die Ellipse einem Kreise nähert, um so kleiner werden — für den Mittelpunkt als Pol — die 4 Schlingen und beim Kreise selbst schrumpfen dieselben zu einem Punkte ein, da nach (12a) $r = 0$ für $a = b$.

Liegt der Pol aber ausserhalb des Mittelpunkts, so fallen mit der Annäherung der Ellipse an den Kreis die beiden Schlingen mehr und mehr zusammen, und beim Kreise selbst wird jetzt die Fusspunktslinie wieder zu einem Kreise, beschrieben über der Verbindung des Poles mit dem Mittelpunkte der Basis als Durchmesser. Es folgt dieses aus (9a), da für $a = b$

$$r = -m \cos \tau - n \sin \tau \text{ ist.}$$

Diese Gleichung ist aber der Ausdruck für einen Kreis, in dessen Peripherie der Coordinatenursprung liegt und dessen Mittelpunktscoordinaten $-\frac{m}{2}$ und $-\frac{n}{2}$ sind. Der Radius der Fusspunktslinie (r_1) ist gegeben durch

$$r_1 = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}.$$

Die Entwickelungen in §. 2 werden hierdurch bestätigt.

Bei der Hyperbel besteht die Fusspunktslinie, wie diese selbst, aus zwei Aesten (Fig. 7 und 8), welche nach (9a) aus dem Unendlichen kommen, wenn $\cos^2\tau = \frac{a^2}{b^2}\sin^2\tau$ ist. Für diesen Polarwinkel wird $\tang\tau = \frac{b}{a}$ und es nähern sich deshalb die verschiedenen Aeste der Fusspunktslinie im Unendlichen mehr und mehr den beiden Geraden, welche durch den Pol parallel den Asymtoten der Hyperbel gezogen werden.

Ferner wird $r = \mp n$ für $\tau = \frac{\pi}{2}$ und $\tau = \frac{3\pi}{2}$ und ausserdem 2 bis 4mal zu 0. Die beiden Aeste der Fusspunktslinie haben deshalb den Pol und den Fusspunkt des aus dem Pole auf die Hauptaxe gefällten Lothes gemeinschaftlich.

Liegt der Pol im Mittelpunkt der Basis, so sind die beiden Aeste der Fusspunktslinie symmetrisch, berühren sich im Pole und nähern sich den Hyperbelasymptoten, wie die Basis selbst, im Unendlichen, nur von der entgegengesetzten Seite.

Rückt der Pol auf der Hauptaxe bis zu den Brennpunkten, so bleibt derselbe immer noch Berührungspunkt für die beiden Aeste der Fusspunktslinie, jedoch bilden sich dieselben jetzt unsymmetrisch aus; der dem nächsten Brennpunkt zugekehrte Ast ist in seinem Scheitel schärfer gekrümmt.

§. 8.

Normal-Fusspunktslinie der Parabel.

Legen wir wieder den Ursprung in den Pol und die Coordinatenaxen parallel den Parabelaxen, so verwandelt sich die Scheitelgleichung der Parabel

$$y_1 = 2p x_1,$$

wenn mit m n die Coordinaten des Poles bezeichnet werden, in

$$(y+n)^2 = 2p(x+m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v}{u} = \frac{p}{y+n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Aus (3), (15) und (16) entwickelt sich als allgemeine Gleichung der Normal-Fusspunktslinie der Parabel

$$\frac{pu}{2}(2v^2+u^2) = v^2(v^2+u^2+um+vn) \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Fällt der Pol in die X-Axe, so wird $n = 0$, daher

$$\frac{pu}{2}(2v^2 + u^2) = v^2(v^2 + u^2 + um) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Für den Parabelscheitel als Pol ist $m = 0$ und $n = 0$, folglich

$$v^2 = \frac{pu(2v^2 + u^2)}{2(v^2 + u^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Für den Brennpunkt als Pol ist $m = \frac{p}{2}$, $n = 0$, deshalb

$$v^2 = \frac{p}{2}u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

In Polarcoordinaten geben die Gleichungen (17) bis (20):

$$r = \frac{p}{2}\cos\tau(2 + \operatorname{cotg}^2\tau) - m\cos\tau - n\sin\tau \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

$$r = \frac{p}{2}\cos\tau(2 + \operatorname{cotg}^2\tau) - m\cos\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

$$r = \frac{p}{2}\cos\tau(2 + \operatorname{cotg}^2\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

$$r = \frac{p}{2}\frac{\operatorname{cotg}\tau}{\sin\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

In Bezug auf die Gestalt der Fusspunktslinie folgt zunächst aus (17a), dass die Curve bei $\tau = 0$ im Unendlichen an der durch den Pol parallel der Parabelaxe gezogenen Geraden beginnt. Mit wachsendem Polarwinkel entfernt sie sich zuerst von dieser Geraden, nähert sich derselben dann wieder gegen den Pol hin und durchschneidet sie endlich im Pole selbst. Für $\tau = \frac{3\pi}{2}$ resp. $\frac{\tau}{2}$ wird $r = n$; die Fusspunktslinie schneidet demnach die Parabelaxe in dem Fusspunkte des Lothes, welches aus dem Pole auf die Axe gefällt wird. Schliesslich verliert sich auch der zweite Ast unter Annäherung an die X-Axe wieder in das Unendliche. (Fig. 9 und 10.)

Fällt der Pol in den Brennpunkt, so wird nach (20) die Fusspunktslinie wieder zu einer Parabel, deren Parameter jedoch nur $^1/_4$ des Parameters der Basis ist.

§. 9.

Normal-Fusspunktslinien von algebraischen Curven höherer Ordnung und von transcendenten Curven.

1. Normal-Fusspunktslinien der logarithmischen Linie.

Sind m n wieder die Coordinaten des Poles, so ergibt sich für diesen als Coordinatenursprung und parallele Axen aus

$$y_1 = a e^{\frac{x_1}{a}}$$

$$(y + n) = a e^{\frac{x + m}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

als Gleichung der logarithmischen Linie.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = e^{\frac{x+m}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Aus (21), (22) und (3) leitet sich als Gleichung der Normal-Fusspunktslinie ab

$$v = \frac{u^2\left[a l\left(\frac{v}{u}\right) - u + m\right] - u n v}{u - a} \quad \ldots \quad (23)$$

Fällt der Pol mit dem Ursprung des Coordinatensystems der Basis zusammen, ist also m = 0, n = 0, so hat man

$$v^2 = u^2 \frac{\left[a l\left(\frac{v}{u}\right) - u\right]}{u - a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Aus (23) folgt zunächst wegen des Ausdruckes $a l\left(\frac{v}{u}\right)$, dass reelle Werthe für die Fusspunktslinie nur dann erhalten werden, wenn v und u entweder beide positiv oder beide negativ sind, die Curve sich also nur in den 1. und 3. Quadranten erstrecken kann.

Weiter wird

für $u = a : v = +\infty$,
» $u = 0 : v = 0$,
» $u = -\infty : v = -0$.

Die Fusspunktslinie kommt demnach aus dem Unendlichen in dem Abstande a von der X-Axe, geht durch den Pol und nähert sich der negativen X-Axe wieder im Unendlichen.

2. Normal-Fusspunktslinie der Lemniskate.

$$r_0 = e\sqrt{2\cos 2\Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

ist die Gleichung der Lemniskate für den Mittelpunkt als Pol. Legt man in den letzteren ebenfalls den Strahlen-Pol der Fusspunktslinie, so ergibt sich

$$\frac{dr_0}{d\Theta} = \frac{-2e^2 \sin 2\Theta}{r_0}$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (5)

$$\operatorname{cotg}(\tau - \Theta) = -\operatorname{tang} 2\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Aus (6), (25) und (26) folgt als Gleichung der Normal-Fusspunktslinie

$$r^2 = 2e^2 \sin^2 2\Theta \cos 2\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Nach (26) ist aber

$$\tau - \Theta = 2\Theta + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$\tau - \Theta = 2\Theta + \frac{3\pi}{2}.$$

Setzt man daher

$$\Theta = \tfrac{1}{3}\tau - \frac{\pi}{2}$$

$$2\Theta = \tfrac{2}{3}\tau - \pi,$$

so ergibt sich statt (27)

$$r^2 = 2e^2 \sin^2 \tfrac{2}{3}\tau \cos \tfrac{2}{3}\tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

r wird zu 0 für

$$\tau = 0,\ \tau = \frac{3\pi}{4},\ \tau = \frac{3\pi}{2} \text{ und } \tau = \frac{9\pi}{4}.$$

Die Normal-Fusspunktslinie der Lemniskate besteht demnach aus einer doppelten Schleife; die Schleifen sind symmetrisch und haben 3 Punkte in der Polaraxe gemeinschaftlich (Fig. 11).

3. Normal-Fusspunktslinie der archimedischen Spirale.

$$r_0 = a\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

ist die Gleichung dieser Spirallinie und es folgt, wenn Axe und Pol der Fusspunktslinie mit denjenigen der Basis zusammenfallen

$$\frac{dr_0}{d\Theta} = a$$

$$\operatorname{cotg}(\tau - \Theta) = \frac{a}{r_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Aus (6), (29) und (30) ergibt sich als Gleichung der Fusspunktslinie

$$r = a\frac{\Theta}{\sqrt{\Theta^2+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

oder wenn man $\tau - \Theta = \varphi$ setzt

$$r = a\frac{\tau-\varphi}{\sqrt{(\tau-\varphi)^2+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Nach (30) ist für $r_0 = 0$ $\tau = 0$ (also auch $\varphi = 0$); die Fusspunktslinie beginnt demnach mit der Spirallinie am Pole; φ nähert sich $\frac{\pi}{2}$ mit wachsendem r_0 und für $\tau = \infty$ wird $r = a$. Wenn deshalb die Fusspunktslinie auch am Ursprunge eine spiralförmige Entwickelung hat, so nähert sich dieselbe mit wachsendem τ jedoch asymtotisch dem Kreise vom Halbmesser a.

4. Normal-Fusspunktslinie der hyperbolischen Spirale.

Die Polargleichung derselben ist

$$r_0\Theta = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\frac{dr_0}{d\Theta} = -\frac{a}{\Theta^2}$$

$$\operatorname{cotg}(\tau-\Theta) = -\frac{1}{\Theta} = -\frac{r_0}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Unter den früheren Voraussetzungen folgt hieraus als Gleichung der Fusspunktslinie

$$r\Theta\sqrt{\Theta+1} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

oder, indem man wieder $\tau - \Theta = \varphi$ setzt,

$$r(\tau-\varphi)\sqrt{(\tau-\varphi)+1} = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Für $\Theta = 0$ wird $r_0 = \infty$ und damit $\tau = 0$ und $\varphi = 0$; wie die Spirallinie beginnt deshalb auch ihre Fusspunktslinie bei $\tau = 0$ im Unendlichen. Jedoch nimmt r viel schneller als r_0 ab, weshalb sich die Fusspunktslinie früher als die Basis dem Pole zu nähern sucht. Schliesslich bildet der Pol für beide Curven einen sog. asymtotischen Punkt.

5. Normal-Fusspunktslinie der logarithmischen Spirale.

$$r_0 = e^{a\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

als Gleichung der Spirallinie gibt

$$\frac{dr_0}{d\Theta} = a e^{a\Theta} = a r_0$$

$$\operatorname{cotg}(\tau - \Theta) = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Hiernach ist der von dem Radiusvector der Basis r_0 und dem zugehörigen Radiusvector der Fusspunktslinie r gebildete Winkel constant.

$$\cos(\tau - \Theta) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

und es folgt aus (6), (37) und (38) als Gleichung der Fusspunktslinie

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} e^{a\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

oder $\tau - \Theta = \varphi$ und $\frac{a}{e^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}} = c$ gesetzt

$$r = c e^{a\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Es ist dieses aber ebenfalls eine logarithmische Spirale, Fig. 12, deren wesentliches Merkmal bekanntlich ist, dass zu Winkelwerthen, die in einer arithmetischen Progression stehen, Radien gehören, welche eine geometrische Progression bilden.

6. *Normal-Fusspunktslinie der Kreisevolvente.*

Die Gleichung der Kreisevolvente in Bezug auf den Mittelpunkt des Grundkreises als Pol ist

$$\Theta = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

$$\frac{d\Theta}{dr_0} = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a r_0} \text{ und daher}$$

$$\operatorname{cotg}(\tau - \Theta) = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Aus (6), (41) und (42) ergibt sich als Gleichung der zugehörigen Fusspunktslinie, wenn der Pol ebenfalls in den Mittelpunkt des Grundkreises fällt,

$$r = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Der Radiusvector der Fusspunktslinie ist demnach constant und gleich dem Radius des Grundkreises der Basis. Die Normal-Fusspunktslinie der Kreisevolvente ist deshalb ihr Grundkreis, was

den bekannten Lehrsatz bestätigt, dass die Normalen der Evolvente Tangenten des Grundkreises sind.

B. Die negativen Normal-Fusspunktslinien.

§. 10.

Allgemeine Ableitung der Gleichungen und die negative Normal-Fusspunktslinie des Kreises.

Man hat als allgemeine Grundgleichungen:

a) in rechtwinkeligen Coordinaten

$$v = f(u) \quad \ldots \quad (44)$$

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad (45)$$

$$v^2 + u^2 - ux - vy = 0 \quad \ldots \quad (46)$$

b) in Polarcoordinaten

$$r = f(\tau) \quad \ldots \quad (47)$$

$$\operatorname{cotg}(\tau - \Theta) = \frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\Theta} \quad \ldots \quad (48)$$

$$r = r_0 \cos(\tau - \Theta) \quad \ldots \quad (49)$$

Durch Eliminiren von $v\,u$ aus (44), (45) und (46) oder $r\,\tau$ aus (47), (48) und (49) wird die Gleichung der negativen Normal-Fusspunktslinie in dem betreffenden Coordinatensysteme erhalten.

Beispiel: Es sei gesucht die negative Normal-Fusspunktslinie des Kreises von dem Radius a, wenn der Pol der Fusspunktslinie mit dem Ursprung des Coordinatensystems in den Mittelpunkt dieses Kreises fällt. In diesem Falle ist

$$v^2 + u^2 = a^2 \quad \ldots \quad (50)$$

und aus (45), (46) und (50) entwickelt sich:

$$a\sqrt{dx^2 + dy^2} = x\,dx + y\,dy$$

oder, da $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ (Differential des Bogens)

$$a\,ds = \tfrac{1}{2}\,d(x^2 + y^2)$$

$$2\,a\,s + C = x^2 + y^2 = r_0^2$$

$$2\,a\int\sqrt{(r_0^2\,d\Theta^2 + dr_0^2)} = r_0^2$$

und hieraus

$$\Theta = \frac{1}{a}\int \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_0^2}}\, dr_0.$$

Setzt man

$$\frac{a}{r_0} = \cos\psi, \text{ also } \frac{a}{\cos\psi} = r_0 \text{ und } \frac{a\sin\psi}{\cos^2\psi} d\psi = dr_0,$$

so ist

$$\Theta = \frac{1}{a}\int \sqrt{1 - \cos^2\psi}\, \frac{a\sin\psi}{\cos^2\psi}\, d\psi$$

$$\Theta = \int \sin\psi \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\, d\psi = \sin\psi \sec\psi - \int \sec\psi \cos\psi\, d\psi$$

woraus folgt

$$\Theta = \operatorname{tang}\psi - \psi = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a^2} - \psi$$

$$\Theta = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a}{r_0}\right)$$

oder, wie in §. 8, Nr. 6

$$\Theta = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Die negative Normal-Fusspunktslinie des Kreises ist demnach die Kreisevolvente.

Fig. 1.

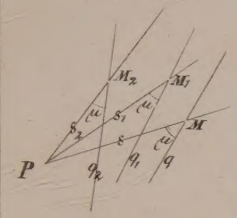

Fig. 2.

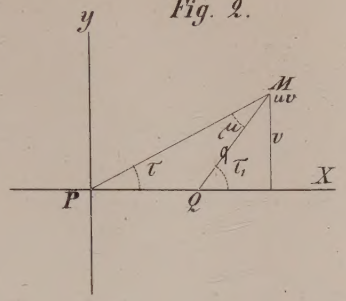

Fig. 3.

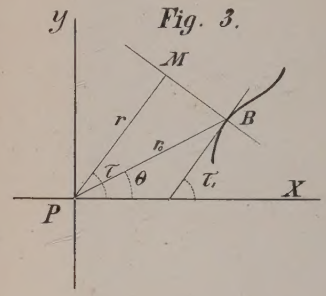

Fig. 4.

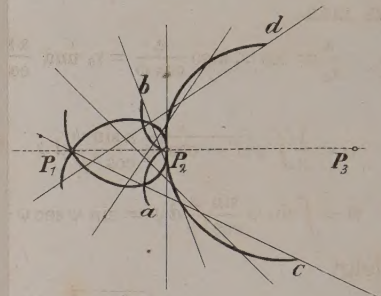

Fig. 5

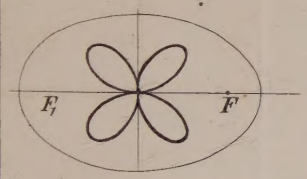

Fig. 6.

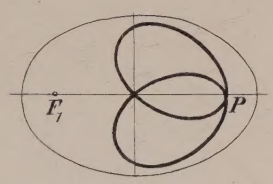

Fig. 7.

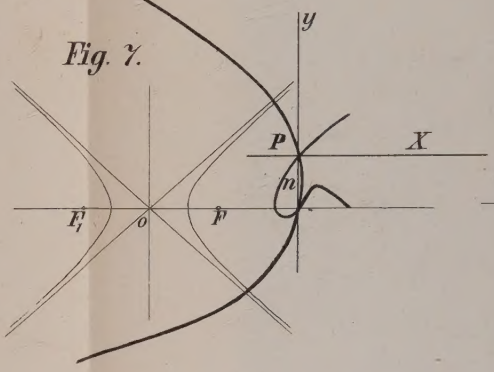

Fig. 8.

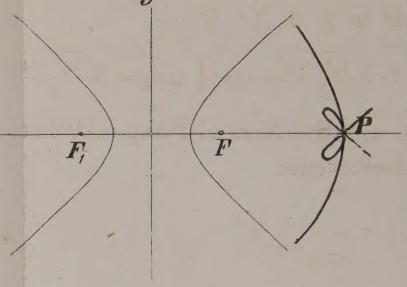

Fig. 9.

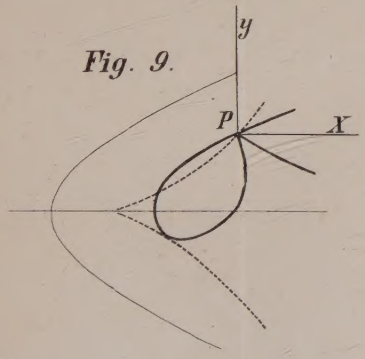

Fig. 10.

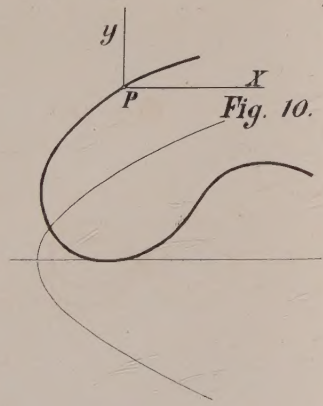

Fig. 11.

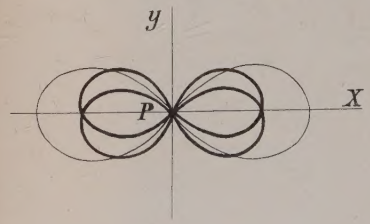
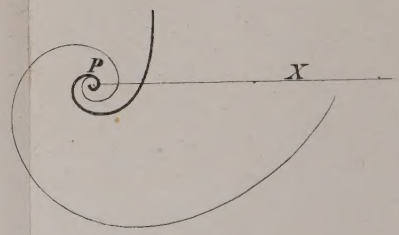
Fig. 12.